

Απόψεις Μαθηματικών Λυκείου για τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Δημητριάδου Ελένη, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών, Σχολική Σύμβουλος Β/θμιας Εκπαίδευσης

1. Ο ιστορικός ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά

Η μελέτη της φιλοσοφίας και της ιστορίας των μαθηματικών διαμέσου των αιώνων φέρνει στο φως την ύπαρξη αντικρουόμενων απόψεων για το ρόλο και το χαρακτήρα της απόδειξης (Hanna 2000, σ. 6). Το φαινόμενο ουσιαστικά συνδέεται με τη διαμάχη μεταξύ δύο διαφορετικών εννοιών της έννοιας: “διαφωτίζω” και “πειθώ”¹, σε ότι αφορά τη σχέση της με τον εμπειρισμό και τη μαρτυρία των αισθήσεων από το ένα μέρος και με την αυστηρότητα και το φορμαλισμό από το άλλο.

Η διαμάχη αυτή έγινε κρίσιμη κυρίως σε δύο διαφορετικές ιστορικές περιόδους: την Ελληνική περίοδο από τον 6^ο έως τον 4^ο αιώνα π.Χ. και την περίοδο από τον 17^ο έως τον 19^ο αιώνα.

(α) Το α΄ μέρος της Ελληνικής περιόδου (λογικά μαθηματικά: 6^{ος} – 5^{ος} αιώνας) συμπίπτει με τη γέννηση και την ανάπτυξη της δημοκρατίας στην Ελλάδα και συνδέεται στενά με την ανάπτυξη της φιλοσοφίας. Οι πρώτες αποδεικτικές μέθοδοι, κάτω από την επίδραση των σοφιστών² και των Πυθαγορείων³, είναι μάλλον διαισθητικές και εμπειρικές (Lloyd, 1979) ενώ ο παλαιότερος τύπος φαίνεται να είναι η συγκεκριμένη οπτική αναπαράσταση (Szabó, 1973). Η πρώτη επιστημολογική ρήξη στο χώρο της απόδειξης και της αξιωματικής θεμελίωσης συνέβη κατά το β΄ μέρος της Ελληνικής περιόδου (παραγωγικά και αξιωματικά μαθηματικά: 4^{ος} – 3^{ος} αιώνας), κάτω από την επίδραση της Ελεατικής φιλοσοφίας⁴ και του Πλάτωνα, όταν αναδείχθηκε η ανάγκη χειρισμού ιδεατών αντικειμένων και οι μέθοδοι έγιναν περισσότερο αυστηρές και αντι-εμπειρικές. Η έμμεση απόδειξη βασισμένη στη λογική κυριάρχησε ενάντια στη συγκεκριμένη οπτική αναπαράσταση (Szabó, 1973, Lloyd, 1979, Høyrup 1990).

(β) Μια παρόμοια επιστημολογική ρήξη δημιουργήθηκε πολλούς αιώνες αργότερα. Κατά το 17^ο αιώνα η απόδειξη συνδέθηκε στενά με την προφάνεια και τη μαρτυρία των αισθήσεων, και η σημασία της ήταν κυρίως να “διαφωτίζει” (Barbin, 1989). Η ρήξη σ’ αυτή τη σημασία της απόδειξης άρχισε με τον Bolzano (1817) και συνεχίστηκε κατά το 18^ο και 19^ο αιώνα, με την επικράτηση της άλγεβρας και της ανάλυσης, των περισσότερο αυστηρών μεθόδων και την κατασκευή των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Στην αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας του Hilbert (1899) η προφάνεια και η οπτική παράσταση δεν έχουν κανένα νόημα. Σύμφωνα με τη φορμαλιστική άποψη, η απόδειξη είναι μια διαδικασία που προκύπτει από ένα μη αντιφατικό αξιωματικό σύστημα βασισμένο σε τυπικά λογικούς κανόνες, ενώ όλα πρέπει να αποδεικνύονται. Τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα δεν είναι πλέον φορμαλιστικά και το θέμα της προφάνειας αποτελεί αντικείμενο

1 Ο όρος «διαφωτίζω» αναφέρεται σε εκείνες της αποδεικτικές διαδικασίες στις οποίες για τον μαθηματικό η επιχειρηματολογία είναι πιο χαλαρή ή ατελής, έχει λογικά κενά, αλλά ωστόσο κάνουν το συμπέρασμα εμφανές και τελικά βέβαιο, δηλαδή φωτίζουν βάσει *προφανειών - μαρτυριών* (του σχήματος, των αισθήσεων κλπ) και για το λόγο αυτό τελικά πείθουν. Ο όρος «πειθώ» αναφέρεται στη *λογική της μη αντιφατικότητας* των αποδεικτικών διαδικασιών, η οποία για τον μαθηματικό αποτελεί πειστήριο με βάση την τρέχουσα αντίληψη για την απόδειξη.

2 Οι **σοφιστές** (2^ο μισό του 5^{ου} π.Χ. αιώνα) ήταν αντίθετοι στο χειρισμό ιδεατών αντικειμένων, ενώ υποστήριζαν τη μαρτυρία των αισθήσεων. Ο Ιπποκράτης ο Χίος (ακμή γύρω στο 400 π.Χ.) χρησιμοποίησε την αρχή της λογικής *απαγωγής* από μια πρόταση σε μια άλλη, ενώ ο τίτλος «Στοιχεία» του έργου του, σηματοδοτεί ένα ξεκίνημα προς την αξιωματική μέθοδο (Arsac 1991, Struik 1967).

3 Η κύρια ανακάλυψη των **Πυθαγορείων** είναι οι «*ασύμμετροι*», οι σημερινοί άρρητοι αριθμοί. Η ύπαρξη της ασυμμετρίας δεν μπορεί να δείχθει με εμπειρικές γνώσεις, αλλά μόνο με τα παραγωγικά μαθηματικά (Bunt κ.ά. 1981, Struik 1967, Szabó 1973).

4 Οι **Ελεάτες** ήταν αντίθετοι στην εμπειρική γνώση και στην αντίληψη των αισθήσεων γενικότερα. Χρησιμοποίησαν την έμμεση αποδεικτική διαδικασία, γνωστή ως *απαγωγή σε άτοπο*. Ο κύριος εκπρόσωπός τους, ο Παρμενίδης (γεννήθηκε στα 515-510 π.Χ.) σκέφτηκε πρώτος να δημιουργήσει ένα εκτεταμένο παραγωγικό επιχείρημα, θέτοντας έτσι μια θεμελιώδη αντίθεση μεταξύ των αισθήσεων και ενός αφηρημένου επιχειρήματος (Szabó 1973, Lloyd 1979).

εκτεταμένης συζήτησης μεταξύ ερευνητών (Barbin, 1989).

2. Επιστημολογικά και διδακτικά εμπόδια στη διδασκαλία και μάθηση της απόδειξης

Διάφορες έρευνες έχουν διαπιστώσει επιστημολογικά εμπόδια στην κατανόηση και παραγωγή αποδείξεων, τα οποία είναι δύσκολο να ξεπεραστούν (Dreyfus & Hadas 1988, Rezende & Nasser 1994, Harel & Sowder 1996, Driscoll 1982).

1. Ένα κύριο επιστημολογικό χαρακτηριστικό της απόδειξης είναι ότι η ανάγκη για επίλυση ενός προβλήματος δίνει πραγματικά νόημα στην απόδειξη, περισσότερο από την ανάγκη για αυστηρά μαθηματικά. Αξίζει μάλιστα να σημειώσουμε τον κρίσιμο ιστορικό ρόλο που έπαιξε η ανάγκη για επίλυση του προβλήματος της ασυμμετρίας (ύπαρξη άρρητων αριθμών), εφόσον μάλλον υπήρξε αφορμή για να αρχίσει να χρησιμοποιείται η έμμεση απόδειξη. Είναι πράγματι πιθανόν, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί να χρησιμοποίησαν αυτή τη θεωρητική μέθοδο, επειδή οι προηγούμενες εμπειρικές (επ' άπειρον «ανθυφαίρεση»⁵) απέτυχαν να προσδιορίσουν μια κοινή τιμή για την πλευρά και τη διαγώνιο του τετραγώνου. Αυτή η ανάγκη ωστόσο, δεν αναφέρεται καθαρά στα γραπτά των Ελλήνων μαθηματικών, οι οποίοι απεύθυναν να δείχνουν το μυστικό τους τρόπο να κάνουν μαθηματικά (Arsac 1991, Høyrup 1990, Lloyd 1979, Barbin 1989, Smith 1911). Η ίδια κατάσταση συνεχίζεται μέχρι σήμερα, όπου η παραδοσιακή διδασκαλία παρουσιάζει μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης και παραμελεί τις εικασίες που σχετίζονται με την επαγωγική σκέψη (Skemp 1971, Freudental 1971, Schoenfeld 1986, Usiskin 1980). Το αποτέλεσμα είναι ότι οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν την ανάγκη των αποδείξεων.
2. Ένα δεύτερο πρόβλημα αφορά στη σχέση μεταξύ λόγου και αισθητήριας αντίληψης, κυρίως στο πεδίο της γεωμετρίας, όπου ιστορικά δημιουργήθηκε η ανάγκη μεταλλαγής της φύσης των γεωμετρικών αντικειμένων σε ιδεατά. Η μεταλλαγή αυτή προήλθε από την επιρροή των Ελεατών και του Πλάτωνα, σε αντίθεση με τους σοφιστές οι οποίοι βασιζόταν στη μαρτυρία των αισθήσεων. Η απόδειξη στη γεωμετρία μπορεί όντως να επιτευχθεί μετά την υπέρβαση του επιστημολογικού εμποδίου της προφάνειας του σχεδίου. Το εμπόδιο αυτό προκαλεί δυσκολίες και στους μαθητές (Lloyd, 1979, Arsac 1991, Barbin, 1989, Høyrup 1990).
3. Ένα άλλο επιστημολογικό εμπόδιο αφορά στις διαφορετικές αντιλήψεις μεταξύ καθηγητών και μαθητών για τη σημασία της απόδειξης. Για τον μαθηματικό η σημασία της απόδειξης είναι κυρίως να “πέιθει” και συνδέεται στενά με τον παραγωγικό συλλογισμό. Για τον μαθητή αντίθετα, η σημασία της απόδειξης είναι να “δια φωτίζει”, δηλαδή να κάνει κάτι προφανές και βέβαιο (βλέπε §1). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να χρειάζεται ο μαθητής συγκεκριμένα παραδείγματα για να πεισθεί ή για να βεβαιωθεί ότι δεν έχει κάνει λάθος, όταν παρατηρεί ή παράγει αντίστοιχα μια απόδειξη (Fischbein 1982, in Hanna 2000, Barbin, 1989).
4. Τέλος, η ιδιαιτερότητα του εκπαιδευτικού μας συστήματος δημιουργεί ειδικά διδακτικά εμπόδια. Στο Γυμνάσιο διδάσκονται η διαισθητική αιτιολόγηση και απλές αποδείξεις, ενώ το βάρος της διδασκαλίας της τυπικής απόδειξης πέφτει κυρίως στη Γεωμετρία του Λυκείου. Ωστόσο στη βαθμίδα αυτή η διδασκαλία της απόδειξης υποβαθμίζεται λόγω της πίεσης του μεγάλου όγκου της διδακτέας ύλης και των επικείμενων εξετάσεων για εισαγωγή στα Πανεπιστήμια. Η υποβάθμιση αυτή γίνεται φανερή μέσα από:
 - την εξαίρεση πολλών αποδείξεων θεωρημάτων από τη διδακτέα ύλη
 - την επικράτηση της “ασκησιολογίας” και
 - τα φροντιστηριακά μαθήματα που κατευθύνουν τους μαθητές μόνο σε “χρήσιμη” μελέτη.

Αυτή η κατάσταση χαρακτηρίζεται από ένα καθηγητή Μαθηματικών ως το «Βατερλώ της σύγχρονης

5 Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη μέθοδο για τον προσδιορισμό του Μ.Κ.Δ. δύο τμημάτων ευθείας: «Αν δοθέντων δύο άνισων μεγθών ανθυφαίρεται το μικρότερο από το μεγαλύτερο, και το εκάστοτε υπόλοιπο ουδέποτε διαίρει το προηγούμενό του, τα μεγέθη είναι ασύμμετρα» (Πρόταση Χ2 των Στοιχείων). Επειδή το κριτήριο ασυμμετρίας δύο μεγθών είναι να προχωρά η διαδικασία μέχρι το άπειρο, αυτό δεν έχει πρακτική εφαρμογή. Επομένως δεν προσφερόταν ως «απόδειξη» της ασυμμετρίας. Ήταν ανάγκη λοιπόν να απομακρυνθούν οι Έλληνες από τον εμπειρισμό και την παραστατικότητα (Szabó, σ. 275).

μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα».

3. Η έρευνα

Η υποβάθμιση της απόδειξης επιδρά στην κοινότητα των καθηγητών Μαθηματικών, η πλειονότητα των οποίων έλαβε κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του '60 μια φορμαλιστική εκπαίδευση, ενισχυμένη από την Ελληνική παράδοση στη γεωμετρία και τη χρήση αυστηρών αποδεικτικών μεθόδων.

Ο σκοπός της έρευνάς μας ήταν η διερεύνηση διαφορετικών επιστημολογιών μεταξύ των καθηγητών Μαθηματικών σχετικά με την απόδειξη και κατά συνέπεια οι πιθανές επιδράσεις αυτών των επιστημολογιών στις πρακτικές διδασκαλίας. Για το σκοπό αυτό πήραν μέρος 27 καθηγητές Μαθηματικών Λυκείου, οι οποίοι κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο 16 ερωτήσεων, κατά το σχολικό έτος 2006 – 07. Η επιλογή βασίστηκε στην προθυμία τους να πάρουν μέρος στην έρευνα. Οι απαντήσεις κωδικοποιήθηκαν κατά θέματα. Οι κατηγοριοποιήσεις που προέκυψαν έδειξαν διαφορετικές απόψεις (προφίλ) μεταξύ των καθηγητών όσον αφορά τις αντιλήψεις τους για την απόδειξη στα πλαίσια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

4. Αποτελέσματα

Η παρούσα εργασία περιλαμβάνει ένα μέρος της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων, που αφορά κυρίως στο ρόλο της απόδειξης και στο χαρακτήρα των αποδεικτικών μεθόδων (αυστηρές ή εμπειρικές) για τα σχολικά μαθηματικά.

4.1. Αποτελέσματα που αφορούν στο ρόλο της απόδειξης στα σχολικά Μαθηματικά

Η ανάλυση των απαντήσεων διέκρινε πέντε ρόλους της απόδειξης:

1. Ανάπτυξη της λογικής - κριτικής σκέψης: Πολλές απαντήσεις έδειξαν την ισχυρή πεποίθηση στη δύναμη της απόδειξης ως ένα διδακτικό αντικείμενο. Σε ορισμένες περιπτώσεις η πεποίθηση αυτή αγγίζει τα όρια θαυμασμού ή λατρείας, που εκφράζεται με ενθουσιώδη σχόλια ενώ δε λείπουν και ιστορικές αναφορές στις Ελληνικές ρίζες της έννοιας. Η παρακάτω απάντηση είναι ενδεικτική:
 - «Διαπλάθει τον απασχολούμενο με τα μαθηματικά σε στοχαζόμενο. Ο στοχασμός είναι μια ιερή στιγμή στα μαθηματικά, συγκρινόμενος με τις εφαρμογές π.χ. τύπων. Αυτό μπορεί να το κάνει και το κομπιούτερ, το έκανε και ο Βαβυλώνιος και ο Αιγύπτιος. Ο Έλληνας μαθηματικός στην κλασσική Ελλάδα στοχάζονταν, και αυτό ήταν νομίζω το μεγαλείο. Έχει και άλλες αρετές όπως η κομψότητα, το απέριτο. Για παράδειγμα η απόδειξη του Ευκλείδη ότι “οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι”, είναι έργο τέχνης».
2. Κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών:
 - «Οι μαθητές θα το ακούσουν, θα το καταλάβουν και θα ξέρουν πώς βγήκε (ενν. το θεώρημα) άρα θα το θυμούνται καλύτερα από το αν άκουγαν απλά την εκφώνηση ενός θεωρήματος. Είναι σαν να ακούς συνταγή μαγειρικής. Αν δεν το μαγειρέψεις ποτέ, θα τη θυμάσαι απ' έξω; Όχι φυσικά!»
3. Πείθει το μαθητή: Μερικοί καθηγητές πιστεύουν ότι η δική τους επιστημολογία για το ρόλο της απόδειξης, δηλαδή να “πειθεί” για την αλήθεια της πρότασης, είναι επίσης και η επιστημολογία των μαθητών τους (βλέπε §2, περίπτωση 3):
 - «...Το ίδιο ισχύει και για τους μαθητές. Όταν του αποδεικνύεις κάτι και δεν το λες έτσι στον αέρα, του ισχυροποιείς την πεποίθηση ότι ισχύει»
 - «Νοιώθει ασφαλής γι' αυτό το οποίο διδάσκεται»
4. Μέσο εξάσκησης για επίλυση ασκήσεων και για επιτυχία στις εξετάσεις: Τέτοιου είδους απαντήσεις είναι ενδεικτικές του εξετασικοκεντρικού χαρακτήρα του εκπαιδευτικού μας συστήματος.

5. Είναι μια έννοια εφαρμόσιμη και απαραίτητη στη ζωή. Οι παρακάτω απαντήσεις εμπεριέχουν και “πολιτικά” σχόλια που έχουν μια άμεση ιστορική αντιστοιχία με το χαρακτήρα της δημοκρατίας στην αρχαία Ελλάδα.
- «Αλίμονο αν δημιουργήσουμε έναν άνθρωπο-πολίτη που δέχεται αβασάνιστα όποια “πληροφορία” εισπράττει μέσω των αισθήσεων. Θα είναι το ιδανικό θύμα στη διάθεση του κάθε λαοπλάνου»
 - «Ένας απόφοιτος Λυκείου, θα πρέπει με την κριτική ικανότητα που θα έχει αποκτήσει, ελέγχοντας την ορθότητα των συλλογισμών, διερευνώντας όλες τις παραμέτρους και απορρίπτοντας κακές επιλογές, να μπορεί να πάρει τις πιο ορθές αποφάσεις στο συντομότερο δυνατό χρόνο».
 - «Αυτό που θα μείνει σε ένα απόφοιτο Λυκείου, θα είναι να μπορεί να ισχυριστεί: «Τα μαθηματικά με έμαθαν να σκέφτομαι σωστά, να μπορώ να παρακολουθήσω τους συλλογισμούς ενός νομικού και να δω αν στέκουν, να μπορώ να τον σταματήσω και να του πω: “Εδώ κάνεις λογικό σφάλμα”»».

Επιχειρήσαμε να συγκρίνουμε αυτά τα αποτελέσματα με εκείνα μιας παρόμοιας έρευνας που έγινε με αφορμή την πρόσφατη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση στις ΗΠΑ (NCTM, 2000) και τις οδηγίες για αναβάθμιση της απόδειξης (Knuth, 2002). Όπως φαίνεται στον Πίνακα που ακολουθεί, ο ρόλος της ανάπτυξης της λογικής σκέψης αναφέρεται και από τους δύο πληθυσμούς. Αξίζει όμως να σημειώσουμε τα σχόλια των Ελλήνων εκπαιδευτικών για τις Ελληνικές ρίζες της απόδειξης. Από ορισμένες χαρακτηριστικές απαντήσεις, θεωρούμε ότι υπάρχει επίσης αντιστοιχία ανάμεσα στους ρόλους που αναγράφονται στη δεύτερη θέση του Πίνακα και για τους δύο πληθυσμούς. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται αρκετά διαφορετικά σε ότι αφορά τους υπόλοιπους ρόλους. Οι καθηγητές στις ΗΠΑ φαίνεται ότι δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην επικοινωνία που αναπτύσσεται μέσα στην τάξη και στον τρόπο που οι μαθητές σκέφτονται. Τέτοιες παράμετροι παραμελούνται από τις παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές που ακολουθούνται στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Αντί αυτών, ωστόσο, τονίζεται ο ρόλος της απόδειξης στην ευρύτερη κοινωνία, έξω από το χώρο των σχολικών Μαθηματικών.

Ο ρόλος της απόδειξης στα σχολικά Μαθηματικά

Έλληνες καθηγητές Μαθηματικών	Καθηγητές Μαθηματικών στις ΗΠΑ
1. Ανάπτυξη της λογικής σκέψης	1. Ανάπτυξη της λογικής σκέψης
2. Κατανόηση και μάθηση των Μαθηματικών	2. Εξήγηση της πρότασης
3. Εφαρμογή στην καθημερινή ζωή (ευρύτερη κοινωνία)	3. Μέσο επικοινωνίας για τα μαθηματικά (κοινωνία της τάξης)
4. Πείθει το μαθητή	4. Μέσο έκθεσης της σκέψης
5. Εξάσκηση για ασκήσεις και εξετάσεις	5. Δημιουργία μαθηματικής γνώσης

4.2. Αποτελέσματα που αφορούν στο χαρακτήρα των αποδεικτικών μεθόδων στα σχολικά μαθηματικά

Σε μια πρώτη φάση, η ανάλυση των απαντήσεων σε ορισμένες ερωτήσεις έδειξε μια διάσταση απόψεων των καθηγητών Μαθηματικών μεταξύ της αντίληψης ότι η κύρια λειτουργία της απόδειξης είναι η ανάπτυξη κριτικής σκέψης και της αντίληψης ότι η υπερβολική χρήση

αποδείξεων δημιουργεί προβλήματα κατανόησης και μάθησης των μαθηματικών. Με βάση αυτή τη διαφορά απόψεων διακρίναμε αρχικά δύο τάσεις:

- ✓ Τύπος - Προφίλ Α: Εδώ ανήκουν καθηγητές με δογματικές ιδέες γύρω από τη χρησιμότητα των αυστηρών αποδεικτικών μεθόδων στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης.
- ✓ Τύπος - Προφίλ Β: Εδώ ανήκουν καθηγητές με λιγότερο απόλυτες ιδέες, οι οποίοι αναγνωρίζουν την αρνητική επίδραση της χρήσης πολλών και δύσκολων αποδείξεων.

Σε μια δεύτερη φάση, άλλες ερωτήσεις μας έδωσαν την ευκαιρία να κάνουμε μια περαιτέρω διάκριση των καθηγητών του Τύπου Β και τελικά να διαπιστώσουμε τρία κύρια προφίλ: Α, Β1 και Β2. Ωστόσο αυτή η κατηγοριοποίηση ήταν αρκετά δύσκολη για ορισμένους καθηγητές, εφόσον παρουσίασαν χαρακτηριστικά που ανήκουν σε 2 οι 3 διαφορετικά προφίλ. Αυτό το τελευταίο είναι ενδεικτικό των αντιφάσεων που δημιουργεί το εκπαιδευτικό μας σύστημα, όχι μόνο μεταξύ των καθηγητών αλλά και στον ίδιο τον καθηγητή ανάμεσα στις προτιμήσεις του, στα πιστεύω του και στις τελικές του επιλογές. Θα τολμούσαμε να πούμε ότι τα 3 κύρια προφίλ αντιστοιχούν στους διαφορετικούς τύπους απόδειξης που κατά καιρούς επικράτησαν κατά τη διάρκεια της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας: περισσότερο, λιγότερο ή καθόλου εμπειρικές μέθοδοι.

- ✓ Τύπος-Προφίλ Α - δογματικός: Εδώ ανήκουν καθηγητές που οι απόψεις τους γύρω από το ρόλο και τη σημασία της απόδειξης αντανακλούν τις φορμαλιστικές απόψεις του 19^{ου} αιώνα. Αντιμετωπίζουν την απόδειξη ως κάτι τέλει και τη διδασκαλία της ως ένα σημαντικό καθήκον. Πιστεύουν ότι η κύρια λειτουργία της απόδειξης είναι η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Οι απόλυτες ιδέες τους επηρεάζουν τις διδακτικές τους πρακτικές, με αποτέλεσμα να επιμένουν στην αυστηρή διατύπωση των αποδείξεων: «Απόδειξη “περίπου” δεν υπάρχει». Οι αποδείξεις που στηρίζονται στην τεχνολογία αντιμετωπίζονται απλώς ως “παιχνιδάκια” ή θεωρούνται κατάλληλα για μικρότερους μαθητές του Γυμνασίου ή του Δημοτικού. Ορισμένοι δυσκολεύονται να συνειδητοποιήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών και ιδιαίτερα την προτίμησή τους στις εμπειρικές μεθόδους. Κατά τη δική τους άποψη τα λάθη και οι μη συμβατικές δραστηριότητες των μαθητών οφείλονται είτε σε έλλειψη προσοχής ή σε ανεπαρκή προετοιμασία, ενώ θεωρούν τη διαδικασία της επανάληψης ως τον μοναδικό τρόπο βελτίωσης.
- ✓ Τύπος-Προφίλ Β1 - λιγότερο δογματικός: Εδώ ανήκουν καθηγητές που είναι μάλλον μετριοπαθείς σε ότι αφορά την αυστηρότητα των τυπικών μεθόδων και την αποδοχή οπτικών αποδείξεων. Ωστόσο, η επίδραση της δικής τους κλασικής παιδείας, η μακροχρόνια εμπειρία τους σε πρακτικές τυπικής διδασκαλίας και το εκπαιδευτικό σύστημα, τους ωθεί τελικά να πράττουν με τρόπο παρόμοιο με αυτόν των καθηγητών του Τύπου Α: «Θα δεχόμαστε μια οπτική απόδειξη, αλλά θα έπρεπε να τονίζονται οι υπονοούμενες υποθέσεις. Θα τη δεχόμαστε παράλληλα με την τυπική απόδειξη».
- ✓ Τύπος-Προφίλ Β2 – περισσότερο προοδευτικός: Εδώ ανήκει μια μειοψηφία μάλλον προοδευτικών καθηγητών. Οι απόψεις τους για τη διδασκαλία της απόδειξης αντανακλούν τον εμπειρισμό του 17^{ου} αιώνα, αν και στην ουσία εκτιμούν την έννοια της απόδειξης ως μαθηματικό αντικείμενο. Τα κύρια χαρακτηριστικά τους είναι ότι αναγνωρίζουν την αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν και να δεχθούν τις αυστηρές αποδεικτικές μεθόδους, και ότι είναι ανοικτοί σε εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας, π.χ. επαγωγή και οπτικές αποδείξεις: «Θέλω να είμαι σύγχρονος. Οι καιροί αλλάζουν, πρέπει να αλλάξουμε και εμείς», «Μόνο οι μαθηματικοί συνειδητοποιούν την αναγκαιότητα της απόδειξης. Οι περισσότεροι μαθητές είναι ικανοποιημένοι με αυτό που αντιλαμβάνονται με τη διαίσθησή τους». Δυστυχώς όμως, κάτω από την πίεση του εκπαιδευτικού συστήματος αναγκάζονται να διδάσκουν αυστηρές αποδεικτικές διαδικασίες και μεθοδολογία για την επίλυση ασκήσεων: «Αναγκάζομαι να διδάσκω με αυτό τον τρόπο. Αλλιώς οι μαθητές θα φύγουν από την τάξη». Ωστόσο, οι σύγχρονες ιδέες τους επηρεάζουν ως ένα βαθμό τη διδασκαλία τους και την επικοινωνία τους με τους μαθητές.

Οι ανωτέρω κατηγοριοποιήσεις βασίστηκαν στη διερεύνηση διαφόρων θεματικών ενοτήτων όπως οι ακόλουθες:

- Η σπουδαιότητα της διδασκαλίας των αποδείξεων των θεωρημάτων

- Η επιστημολογία των μαθητών: η εμπειρική σκέψη
- Χρήση μη συμβατικών αποδεικτικών μεθόδων (π.χ. ατελείς αιτιολογήσεις, οπτικές αποδείξεις ή μετρικές μέθοδοι)
- Η απόδειξη ως μαθηματική έννοια και ως διδακτικό αντικείμενο
- Ο σκοπός της διδασκαλίας της απόδειξης
- Οι απαιτήσεις των καθηγητών κατά την αποδεικτική διαδικασία

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που αφορούν στις δύο πρώτες θεματικές ενότητες.

(α) Η σπουδαιότητα της διδασκαλίας των αποδείξεων των θεωρημάτων

Οι καθηγητές του Προφίλ Α πιστεύουν ότι όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων, ακόμη και οι «προφανείς», θα πρέπει να διδάσκονται. Οι λόγοι που επικαλούνται είναι οι παρακάτω:

- ✓ Για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης
- ✓ Για να γίνει φανερή η δομή και η λογική των Μαθηματικών
- ✓ Για να γίνει φανερή η γενική ισχύς των θεωρημάτων
- ✓ Ως βάση για μελλοντικές αποδείξεις
- ✓ Για την καλύτερη κατανόηση και απομνημόνευση του θεωρήματος

Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις:

- «Η κριτική σκέψη δεν αναπτύσσεται με μια απλή αναφορά σε αναπόδεικτα θεωρήματα. Αυτό οδηγεί σε μαθηματικό συνταγολόγιο για να αντιμετωπίσουμε κάποιες κατάλληλα επιλεγμένες ασκήσεις και να πείσουμε τον αδαή μαθητή ότι το συνταγολόγιο λειτουργεί. Ίσως στο μέλλον ο καθηγητής να διατυπώνει ένα θεώρημα και αντί απόδειξης να λέει στους μαθητές: “Σας δίνω το λόγο της τιμής μου, ή ορκίζομαι ότι το θεώρημα ισχύει”».
- «Η φράση “Η απόδειξη είναι προφανής” δεν πρέπει να υπάρχει στα σχολικά βιβλία. Τίποτε δεν είναι προφανές για κάποιον που έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με την νομοτέλεια και την αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης».

Από το άλλο μέρος, οι καθηγητές που ανήκουν στο Προφίλ Β θεωρούν ότι δεν πρέπει να διδάσκονται όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων. Αναφέρουμε ορισμένους λόγους και αντίστοιχες χαρακτηριστικές απαντήσεις:

- ✓ Λόγω περιορισμών του διδακτικού χρόνου:
- “... (αν και) είναι κρίμα που οι αποδείξεις στην Ανάλυση είναι εκτός διδακτέας ύλης. Αυτές είναι εκατομμύρια φορές προτιμότερες από αυτή την παρανοϊκή “ασκησιολογία”».
- ✓ Λόγω των Πανελλαδικών Εξετάσεων:
- «Ο στόχος των μαθηματικών στο Λύκειο είναι η επιτυχία στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Εάν μια απόδειξη δεν είναι πιθανό θέμα, οι μαθητές ΔΕΝ ενδιαφέρονται».
- ✓ Είναι δύσκολες ή απαιτητικές:
- «Αντί να πείθουν, οδηγούν στην αποστήθιση. Μερικές φορές μια πρόχειρη οπτική διαπίστωση δίνει καλύτερα αποτελέσματα».
- «Οι προφανείς αποδείξεις έχουν νόημα για όσους έχουν φτάσει σε βάθος στα Μαθηματικά και δεν ικανοποιούνται εύκολα. Τέτοιες “βαριές” αποδείξεις είναι σαν τα “βαριά ναρκωτικά”, μια μαθηματική “διαστροφή”. Κάνουν τους μαθητές να το βάζουν στα πόδια».

(β) Η επιστημολογία των μαθητών: η εμπειρική σκέψη

Ένας από τους στόχους της έρευνας ήταν να διαπιστώσουμε κατά πόσο οι καθηγητές αντιλαμβάνονται την ύπαρξη διαφορετικών επιστημολογιών μέσα στην τάξη τους σχετικά με την απόδειξη, δηλαδή (α) την επιστημολογία των μαθηματικών που διδάσκονται, σύμφωνα με την οποία η πρόταση είναι ορθή μόνο επειδή έχει αποδειχθεί και (β) την επιστημολογία των μαθητών που βασίζεται στην ανάγκη εμπειρικής διαπίστωσης (Hanna, 2000). Για το σκοπό αυτό

χρησιμοποιήθηκε η πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου μας:

Ερώτηση 1: Ένας μαθητής προσπαθεί να βρει το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου μετρώντας με μοιρογνωμόνιο, μόλις έχει ολοκληρωθεί στην τάξη η αντίστοιχη θεωρητική απόδειξη. (α) Γιατί πιστεύετε ότι αντέδρασε έτσι ο μαθητής; (β) Τι κατά τη γνώμη σας θα πρέπει να κάνει ο καθηγητής στη συγκεκριμένη περίπτωση;

Οι καθηγητές του Προφίλ Α πιστεύουν ότι η αντίδραση αυτή οφείλεται είτε σε πρακτικούς λόγους (έλλειψη προσοχής, άγνοια της θεωρίας), ή στην εξοικείωση του μαθητή με εμπειρικές μεθόδους σε προηγούμενες τάξεις. Μερικές φορές μάλιστα προτείνεται η επανάληψη της αποδεικτικής διαδικασίας ως μέσο “θεραπείας”:

- «Δεν μπορείς τόσο εύκολα να ξεριζώσεις τις εμπειρικές μεθόδους».
- «Ο καθηγητής ή άλλοι μαθητές θα πρέπει να επαναλάβουν την απόδειξη. Θα του έλεγα: “Πρόσεξε! Παρατήρησε πώς το αποδεικνύουμε!”».

Αντίθετα, οι καθηγητές Τύπου Β2, με περισσότερο προοδευτικές ιδέες, πιστεύουν ότι ο μαθητής δεν έχει κατανοήσει το γενικό χαρακτήρα της απόδειξης και προτείνουν να χρησιμοποιήσει ο καθηγητής μια αντίφαση στον ισχυρισμό του μαθητή:

- «Ο μαθητής δεν έχει συνειδητοποιήσει ότι από τη στιγμή που μια πρόταση έχει αποδειχθεί, γίνεται νόμος».
- «Ο καθηγητής θα πρέπει να σχεδιάσει διάφορα σχήματα, όπου η μέτρηση θα δώσει 179° , 184° ... για να βοηθήσει το μαθητή να αντιληφθεί ότι η μέτρηση είναι μόνο μια ενδεικτική και όχι ασφαλής μέθοδος».

Η πιστεύουν ότι ο μαθητής δεν εμπιστεύεται ή δεν αισθάνεται την ανάγκη της θεωρητικής απόδειξης. Τα ακόλουθα σχόλια ενός καθηγητή έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι γίνεται παράλληλα αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της απόδειξης και σε επιστημολογικά εμπόδια:

- «Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν πρέπει να επιμένουμε στην αποδεικτική διαδικασία, αλλά θα πρέπει να είμαστε ικανοποιημένοι όταν οι μαθητές κατανοούν. Νομίζω ότι μόνο οι μαθηματικοί αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα της απόδειξης, ενώ οι περισσότεροι μαθητές αρκούνται σ’ αυτό που αντιλαμβάνονται με τη διαίσθησή τους. Αλλά και η ιστορία των Μαθηματικών δείχνει ότι δεν είχαμε πάντοτε δεδομένη την αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας. Από τον Ευκλείδη και μετά προέκυψε αυτή η αναγκαιότητα. Έως τότε τους αρκούσε το ότι τους έπειθαν οι αισθήσεις. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει προφανώς όταν κάποιος μαθητής αποδεικνύει ασκήσεις στην Ανάλυση με σχήματα. Εγώ θα θεωρούσα τέτοιες λύσεις ορθές, αν και δεν είναι αναλυτικές, γιατί καταλαβαίνω ότι το παιδί έχει αντίληψη και αυτό είναι το ζητούμενο στην εκπαίδευση...

Ο καθηγητής μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο την αυθεντία του, αλλά αυτό δεν είναι παιδαγωγικά ορθό. Ίσως οι προτάσεις που γίνονται διαισθητικά αντιληπτές δεν θα έπρεπε να αποδεικνύονται. Έτσι, η αναγκαιότητα της απόδειξης θα προκύψει μέσα από άλλες, όπου η διαίσθηση είναι άχρηστη».

Σχόλιο: Το 66% των απαντήσεων που δόθηκαν στην ερώτηση 1(α) ανήκουν σε καθηγητές του Τύπου Α. Αυτό το ποσοστό είναι ενδεικτικό της δυσκολίας των καθηγητών να αντιληφθούν ότι τέτοιου είδους αντιδράσεις όπως η ανωτέρω, χαρακτηρίζουν κυρίως την αδυναμία του μαθητή να βρει συσχετίσεις μεταξύ του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών αντικειμένων, και κατά συνέπεια την αδυναμία της απόδειξης να πείσει το μαθητή για την αλήθεια της πρότασης.

5. Συζήτηση

Αν και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία βασίζονται κυρίως σε μια ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων, δείχνουν ωστόσο 4 παράγοντες που επηρεάζουν τα πιστεύω και τη συμπεριφορά των καθηγητών Μαθηματικών στη χώρα μας:

(1) Η Ελληνική παράδοση: Οι ιστορικές αναφορές και τα ενθουσιώδη σχόλια δείχνουν ότι η

Ελληνική παράδοση στη γεωμετρία και στις κλασσικές αποδεικτικές μεθόδους υπάρχει και παραμένει ισχυρή στο μυαλό της πλειοψηφίας των καθηγητών.

(2) Η εκπαίδευση των καθηγητών: Οι περισσότεροι, ηλικίας 40-55 ετών, έχουν διδαχθεί μαθηματικά και ειδικά μεγάλο όγκο γεωμετρίας με ένα παραδοσιακό αυστηρό τρόπο.

(3) Η μακροχρόνια εμπειρία στη διδασκαλία τυπικών μεθόδων με παραδοσιακό τρόπο: Όταν παρουσιάσαμε κάποιες οπτικές αποδείξεις που υποστηρίζονται από την τεχνολογία σε ένα καθηγητή, οι αντιδράσεις του πέρασαν από τρεις διαδοχικές φάσεις: από τον σκεπτικισμό για τις ικανότητές του, στον ενθουσιασμό και τελικά στην υποβάθμιση των οπτικών μεθόδων: «Μετά από 30 χρόνια διδασκαλίας δεν είμαι σίγουρος εάν θα μπορούσα να δουλέψω με αυτές τις μεθόδους. ...Μ' αρέσει πάρα πολύ!!... Στο Λύκειο τα θεωρώ αυτά μάλλον παιγνίδια. Το Λύκειο είναι για πιο σοβαρά πράγματα. Όλοι εμείς οι παλιοί καθηγητές έχουμε τις ίδιες ιδέες».

(4) Η πίεση του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος ιδιαίτερα στο Λύκειο, το οποίο δημιουργεί το φαινόμενο της «ασκησιολογίας», υποβαθμίζει τη διδασκαλία της γεωμετρίας και της απόδειξης και βάζει σε δεύτερη θέση τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της εκπαίδευσης, που αφορούν περισσότερο στην κατανόηση παρά στη μάθηση μαθηματικών τεχνικών.

Αυτή η κατάσταση δημιουργεί:

1. Αντιφάσεις μεταξύ της κοινότητας των καθηγητών Μαθηματικών σχετικά με τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης και το χαρακτήρα των αποδεικτικών μεθόδων στα σχολικά μαθηματικά. Αυτές οι αντιφατικές απόψεις αντανakλούν σε κάποιο βαθμό τον εμπειρικό ή το φορμαλιστικό χαρακτήρα της απόδειξης κατά τη διάρκεια της ιστορικής της εξέλιξης.
2. Αντιφατικές απόψεις ανάμεσα στις προτιμήσεις ή τα πιστεύω ενός καθηγητή και στις τελικές του διδακτικές επιλογές.

Οι εξωτερικοί παράγοντες (οι περιορισμοί του εκπαιδευτικού μας συστήματος) και οι διαπιστωμένοι εσωτερικοί παράγοντες (οι διαφωνίες και η ασυνέπεια μέσα στην κοινότητα των καθηγητών Μαθηματικών) δημιουργούν ένα θολό τοπίο, όσον αφορά το χαρακτήρα και το ρόλο της απόδειξης και των αποδεικτικών μεθόδων στα σχολικά μαθηματικά, και τελικά ασκούν αρνητική επίδραση στη διδασκαλία και κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας στο Λύκειο.

Υποσημειώσεις

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Arzac G., 1991, «Η καταγωγή της απόδειξης», Τετράδια Διδακτικής Μαθηματικών, Τεύχος 7, Θεσσαλονίκη, 63-72.
2. Barbin E., 1989, «Η μαθηματική απόδειξη: Επιστημολογικές σημασίες και διδακτικά ζητήματα», Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών, Τεύχος 18, Θεσσαλονίκη, 1-31.
3. Bunt, L.N.H., Jones, P.S. & Bedient, J.D., 1981, Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, Αθήνα.
4. Høyrup, J., 1990, «Θεσμοποιήσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών και ο χαρακτήρας του μαθηματικού επιστημονικού «λόγου»», Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών, Τεύχος 41, Θεσσαλονίκη.
5. Struik, D.J., 1967, Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών, Β' έκδοση, Δαίδαλος-Ι. Ζαχαρόπουλος Α.Ε., Αθήνα.
6. Szabó, A., 1973, Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήνα.

Ξένη Βιβλιογραφία

1. Dreyfus T., Hadas N., 1988, "Euclid May Stay-and Even Be Taught", National Council of Teachers of Mathematics, 1987 Year Book, USA, 47-58.

2. Driscoll M., 1982, "The Path to Formal Proof", in *Research Within Reach: Secondary School Mathematics-A Research-Guided Response to the Concerns of Educators*, National Council of Teachers of Mathematics, U.S.A., 152-166.
3. Freudental H., 1971, "Geometry between the devil and the deep sea", *Educational Studies in Mathematics*, Vol.3, 413-435.
4. Hanna G., 2000, "Proof, Explanation and Exploration: An Overview", *Educational Studies in Mathematics*, Vol.44, 5-23.
5. Harel G., Sowder L., 1996, "Classifying Processes of Proving", *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3, University of Valencia, Valencia, Spain, 59-65.
6. Knuth, E.J., 2002, "Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics", *Journal of Mathematics Teacher Education*, Vol.5, 61-88.
7. Lloyd, G.E.R., 1979, *Magic, Reason and Experience*, Cambridge University Press.
8. Rezende J., Nasser L. 1994, "Kinds of Argumentation used in Geometry", *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Lisbon, Lisbon, Portugal, Vol.1, 66.
9. Schoenfeld A.H., 1986, "On having and using geometric knowledge", in *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, J. Hierbert, Hillsdale, NJ: Erlbaum (eds.), 225-264.
10. Smith D.E., 1911, *The Teaching of Geometry*, Ginn and Company, USA.
11. Skemp R., 1971, *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books Ltd., England.
12. Usiskin Z., 1980, "What should not be in the Algebra and Geometry curricula of average college-bound students?", *Mathematics Teacher*, Vol.73(6), 413-424.